Όμιλος ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Προτύπου Πειραματικού Λυκείου
ΙΩΝΙΔΕΙΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΠΕΙΡΑΙΑ 2013-2014

Διδάσκων: Β.Ε. Βισκαδουράκης

Παραδείγματα στην ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΣΤΕΡΩΝΑ

Η Αρχή του Περιστερώνα (The pigeon principle) αλλιώς γνωστή ως Αρχή του Συρταριού (The box principle) λέει ότι:

*Αν **n** περιστέρια τοποθετηθούν σε **m** φωλιές, (όπου m<n), τότε σε τουλάχιστον μία φωλιά υπάρχουν τουλάχιστον 2 περιστέρια (αν υπάρχουν ν φωλιές και ν+1 περιστέρια τότε υπάρχει σίγουρα μία φωλιά στην οποία υπάρχουν τουλάχιστον 2 περιστέρια).*

Παραδειγματα

Παράδειγμα 1

Σε ένα δωμάτιο υπάρχουν n άνθρωποι, άλλοι χαιρετιούνται με χειραψία κι άλλοι όχι. Τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο άνθρωποι που έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό χειραψιών.

Οι δυνατές τιμές χειραψιών για έναν άνθρωπο είναι
$0, 1, \ldots, n-1$.
Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν δύο άνθρωποι που έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό χειραψιών, τότε υπάρχει ένας άνθρωπος που έχει κάνει $n-1$ χειραψίες (δηλαδή με όλους) και ένας με 0 χειραψίες, που είναι άτοπο.

Παράδειγμα 2

Σε κάθε σύνολο 13 ανθρώπων, υπάρχουν ≥ 2 γεννημένοι ίδιο μήνα.

Περιστέρια =13 άνθρωποι

Φωλιές=12 μήνες

Παράδειγμα 3

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός τραπουλοχάρτων που μπορεί να τραβήξει κάποιος από μια συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων ώστε να έχει δύο του ίδιου χρώματος.

Μία συνηθισμένη τράπουλα περιέχει μαύρα και κόκκινα χαρτιά, άρα τραβώντας 3 εξασφαλίζεται ότι τουλάχιστον 2 από αυτά είναι του ίδιου χρώματος.

Ναταλία Σαλπέα

ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

Έστω $a,b > 0$ και $a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5$.
Να βρεθεί το $\max(a+b)$

ΛΥΣΗ

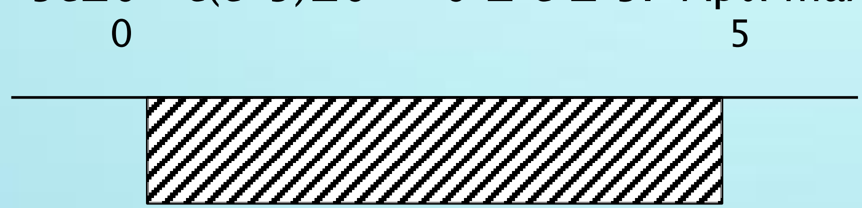
Έστω $c=a+b \Leftrightarrow b=c-a$

$a^2+4(c-a)^2=2a+12(c-a)-5 \Leftrightarrow a^2+4c^2-8ac+4a^2=2a+12c-12a-5 \Leftrightarrow 5a^2+2(5-4c)a+4c^2-12c+5=0$

Επειδή $a \in R \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$4(5-4c)^2-20(4c^2-12c+5\geq 0 \Leftrightarrow 25-40c+16c^2-20c^2+60c-25\geq 0$

$\Leftrightarrow -4c^2+20c\geq 0 \Leftrightarrow c^2-5c\leq 0 \Leftrightarrow c(c-5)\leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq 5$. Άρα $\max(c)=5$



Φωτεινή Μπούτου

ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ και μια Πρόταση Συγγραμμικότητας

Ένας φανταστικός αριθμός, είναι ένας αριθμός, το τετράγωνο του οποίου είναι ένας αρνητικός πραγματικός αριθμός.
Ο όρος καθιερώθηκε από τον **Ρενέ Ντεκάρτ** το 1637 στο έργο του La Géométrie και είχε υποτιμητική σημασία.

i ?

i είναι η φανταστική μονάδα με την ιδιότητα:

$i^2 = -1$

δηλαδή, η φανταστική μονάδα εις το τετράγωνο ισούται με -1.

Το μπλέ επαναλαμβάνεται...

$i^{-3} = i$
$i^{-2} = -1$
$i^{-1} = -i$
$i^{0} = 1$
$i^{1} = \mathrm{i}$
$i^{2} = -1$
$i^{3} = -\mathrm{i}$
$i^{4} = 1$
$i^{5} = i$
$i^{6} = -1$
$i^{n} = i^{\mathrm{n(mod\ 4)}}$

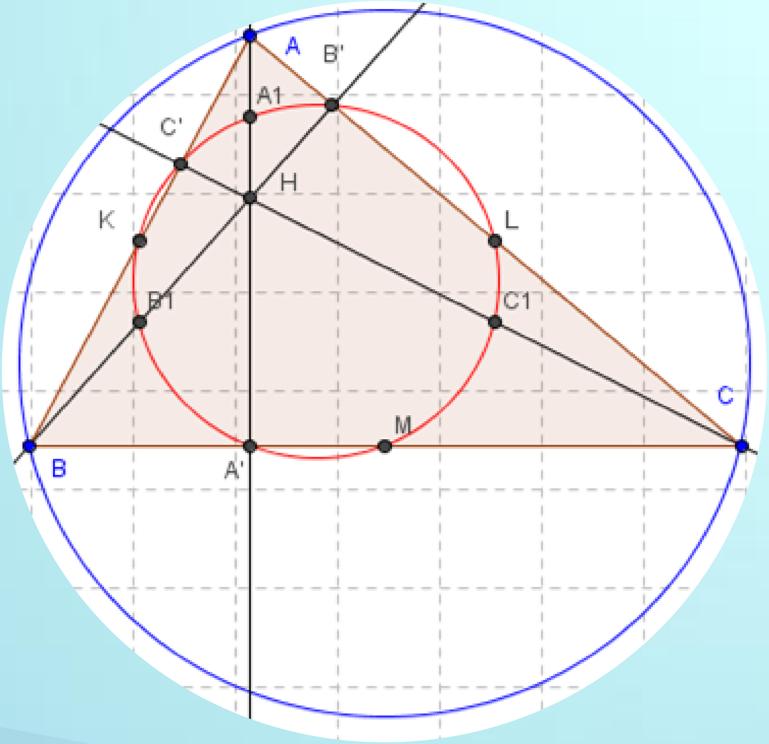
Αν $z_1=x_1+y_1i$ και $z_2=x_2+y_2i$ δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε οι εικόνες τους $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$, και η αρχή των αξόνων είναι στην ίδια ευθεία αν και μόνο αν ισχύει: $y_1/x_1=y_2/x_2$.

Θεωρούμε τα διανύσματα,
$\overrightarrow{OM_1}(x_1,y_1)$ και $\overrightarrow{OM_2}(x_2,y_2)$.
Για να ισχύει η παραπάνω πρόταση αρκεί $|\overrightarrow{M_1M_2}|=|\overrightarrow{OM_1}|+|\overrightarrow{OM_2}| \Leftrightarrow$
$|z_2-z_1|=|z_1|+|z_2|$,
ή
$\left||M_1M_2|\right| = \left||OM_1|-|OM_2|\right| \Leftrightarrow |z_2-z_1| = \left||z_1|-|z_2|\right|$,
Οι σχέσεις αυτές τελικά καταλήγουν στην $x_1y_2-x_2y_1=0$,που ακόμα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή: $y_1/x_1=y_2/x_2$.

Δημήτρης Κουρσάρης

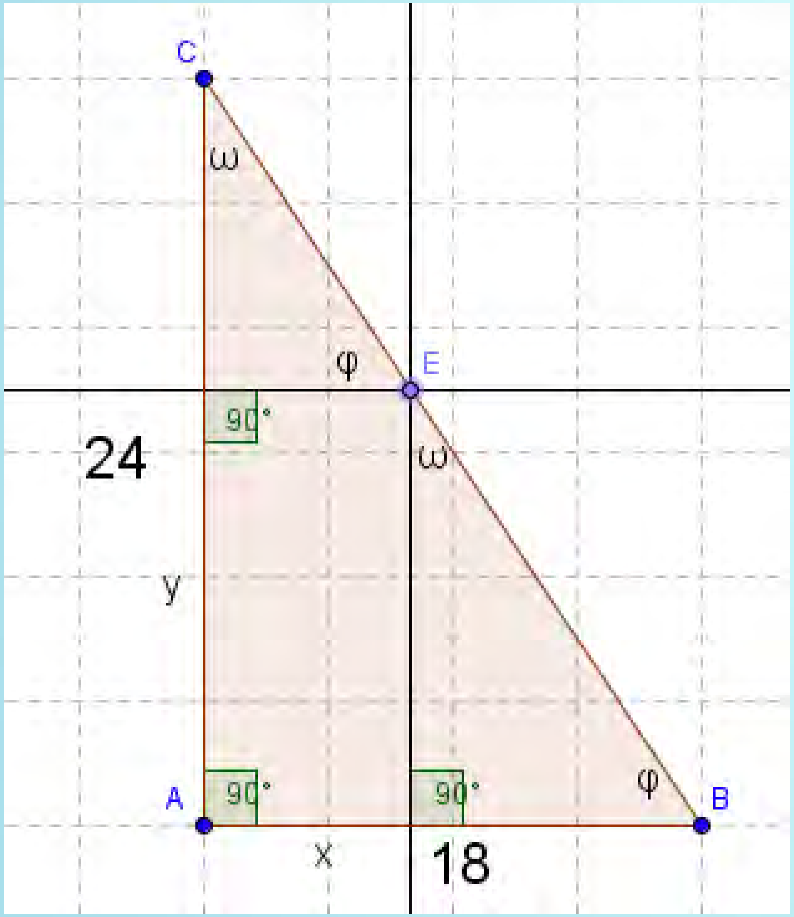
Ο ΚΥΚΛΟΣ ΤΟΥ EULER

Ο κύκλος του Euler ορίζεται από τα τρία μέσα των πλευρών, τα τρία ίχνη των υψών και τα τρία μέσα των τμημάτων ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ (όπου Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ).



Αρετή Κοκκινιώτου

ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΛΥΣΗ



Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=18 και ΑΓ=24. Να βρεθεί ένα σημείο Ε πάνω στην ΒΓ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι μέγιστο.

ΛΥΣΗ

Τριγ.ΔΒΕ ≈ τριγ.ΖΕΓ $\Longleftrightarrow$ ΔΕ / ΖΓ =ΔΒ/ΖΕ =ΒΕ/ ΕΓ

$\Longleftrightarrow$ x/18-χ = 24-y/y $\Longleftrightarrow$ xy= (18-x)(24-y)

xy= 18x24-18y-24x+xy $\Longleftrightarrow$ Y=-24/18X+24

$E_{(ABCD)}$ =xy=x(-3/4 +24) E(x)= -3/4(x^2-18x)=

$$= -4/3(x^2-18x+81-81)= \underbrace{-4/3(x-9)^2}_{\leq 0}\underbrace{+108}_{\geq 0}$$

Επομένως για να πάρει τη μέγιστη τιμή θα πρέπει $-4/3(x-9)^2 \leq 0$ να πάρει τη μέγιστη που είναι το 0 άρα χ=9

συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το Ε θα βρίσκεται στο μέσον της υποτείνουσας.

Αθηνά Τερζόγλου

ΓΙΑΤΙ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ?

Να δείξετε ότι η εξίσωση
$2x^8 + 18x^6 - 64x^3 + 81 = 0$
είναι αδύνατη στο R

ΕΠΙ-ΛΥΣΗ

$2x^8 + 18x^6 - 64x^3 + 81 = 0$

$2x^8 + 2x^6 + 16\,(x^6 - 4x^3 + 2^2) + 17 = 0$

$2x^8 + 2x^6 + 16\,(x^3 - 2)^2 + 17 = 0$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο R γιατί οι ζυγές δυνάμεις είναι ≥ 0 αλλά έχουμε και το 17 που είναι θετικός.

Γιώργος Λεμπιδάκης

ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ –ΤΡΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ

Αν $a^2+b^2=1$ (1) και $x^2+y^2=1$ (2) δείξτε ότι $|ax+by|\leq 1$. Πότε ισχυεί η ισότητα;

ΛΥΣΗ

- 1ος τρόπος

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ X^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+x^2+y^2=2 \Leftrightarrow (a^2+x^2)+(b^2+y^2)=2 \quad (3) \end{cases}$$

ΑΛΛΑ $(|a|-|x|)^2\geq 0 \Leftrightarrow a^2+x^2-2|a||x|\geq 0$

$\Leftrightarrow a^2+x^2 \geq 2|a||x|$ (4)

Αντίστοιχα $(|\beta|-|y|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2+y^2 \geq 2|b||y|$ (5)

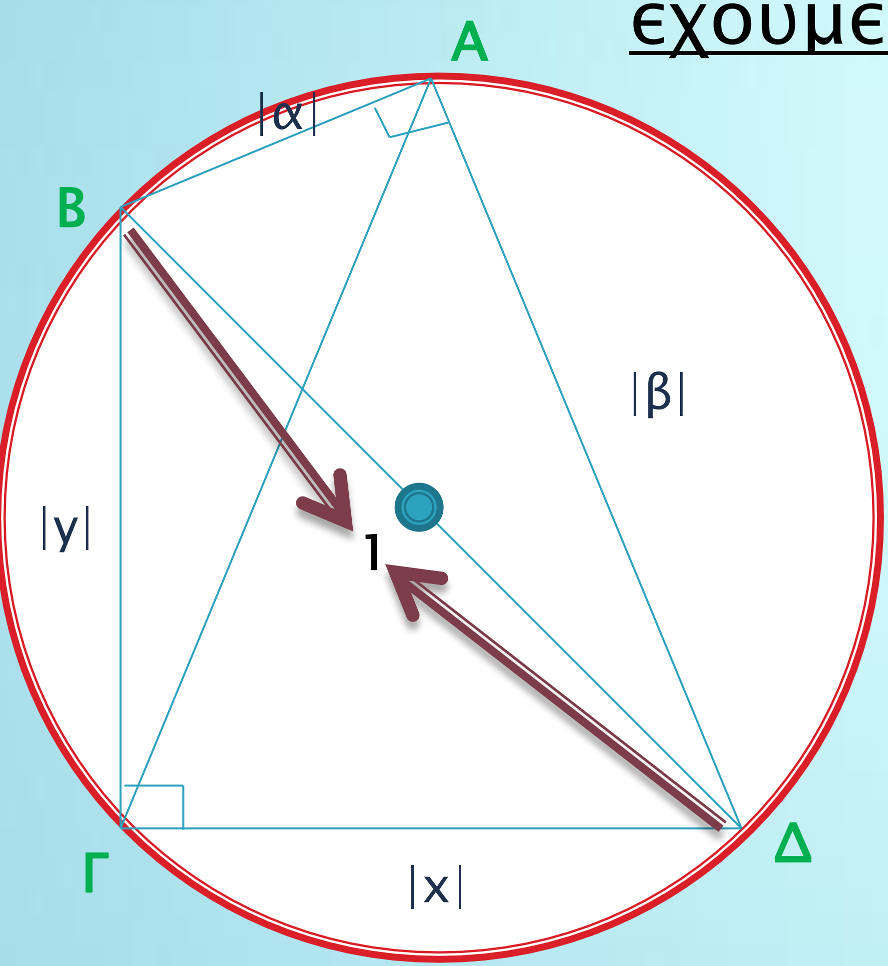
ΑΠΌ (4) + (5) θα **έχω** : $a^2+b^2+x^2+y^2\geq 2(|ax|+|by|) \Leftrightarrow 2 \overset{(3)}{\geq} 2(|ax|+|by|)$

$\Leftrightarrow |ax|+|by|\leq 1 \overset{\leq}{\Longrightarrow} |\alpha x+\beta y| \quad |\alpha x|+|\beta y|\leq 1$

Η ισότητα, λόγω (4),(5) ισχύει όταν: $\begin{cases} (|\alpha|-|x|)^2=0 \\ (|\beta|-|y|)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha|=|x| \\ |\beta|=|y| \end{cases}$

❑ $2^{ος}$ τρόπος

Από το θεώρημα του Πτολεμαίου έχουμε:



$$|\alpha x|+|\beta y|=|B\Delta||A\Gamma|$$

$$\Leftrightarrow |\alpha x|+|\beta y|=|A\Gamma|\leq 1$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} |\alpha x|+|\beta y| \leq 1 \quad (4)$$

ΌΜΩΣ

$$|\alpha x+\beta y|\leq |\alpha x|+|\beta y| \overset{(4)}{\leq} 1$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{|\alpha x+\beta y| \leq 1}$$

Από την σχέση (3) βλέπουμε ότι **για να ισχύει η ισότητα** αρκεί $|\alpha x|+|\beta y|=|A\Gamma|=1$

Όμως αν $|A\Gamma|=1$ η ΑΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου. **Ακόμα** το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα έχει τις δύο διαγώνιές του ίσες. **Επομένως** το ΑΒΓΔ θα είναι ορθογώνιο παραλ/μο και θα έχει **$|\alpha|=|x|$ και $|\beta|=|y|$**

$a^2+b^2=1$ (1) και
$x^2+y^2=1$ (2)

3ος τρόπος – και τελευταίος…

Από το θεώρημα Cauchy – Swartz έχουμε:

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) \geq (\alpha x+\beta y)^2 \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} 1 \geq (\alpha x+\beta y)^2 \Leftrightarrow \underline{|\alpha x+\beta y| \leq 1}$$

Η **συνθήκη για να ισχύει η ισότητα** στο θεώρημα των Cauchu – Swartz είναι :

$$\alpha y=\beta x \Leftrightarrow \alpha= \frac{\beta x}{y} \quad (3)$$

$$(1) \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{\beta^2\chi^2}{y^2} + \beta^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\beta^2\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)=1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \beta^2\frac{1}{y^2}=1 \Leftrightarrow \beta^2=y^2 \;(4) \Leftrightarrow |\beta|=|y|$$

$$\begin{cases} (1) \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=1 \\ (2) \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2=1-\alpha^2 \\ y^2=1-x^2 \end{cases} \overset{(4)}{\Longrightarrow} 1-\alpha^2=1-x^2 \Leftrightarrow \alpha^2=x^2 \Leftrightarrow |\alpha|=|x|$$

<u>Γενική μορφή θεωρήματος</u> :

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots\nu^2)(x^2+y^2+z^2+\ldots n^2) \geq (\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots\nu n)^2$$

Μπενετάτος Αλέξανδρος

ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΙΣ **ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ**

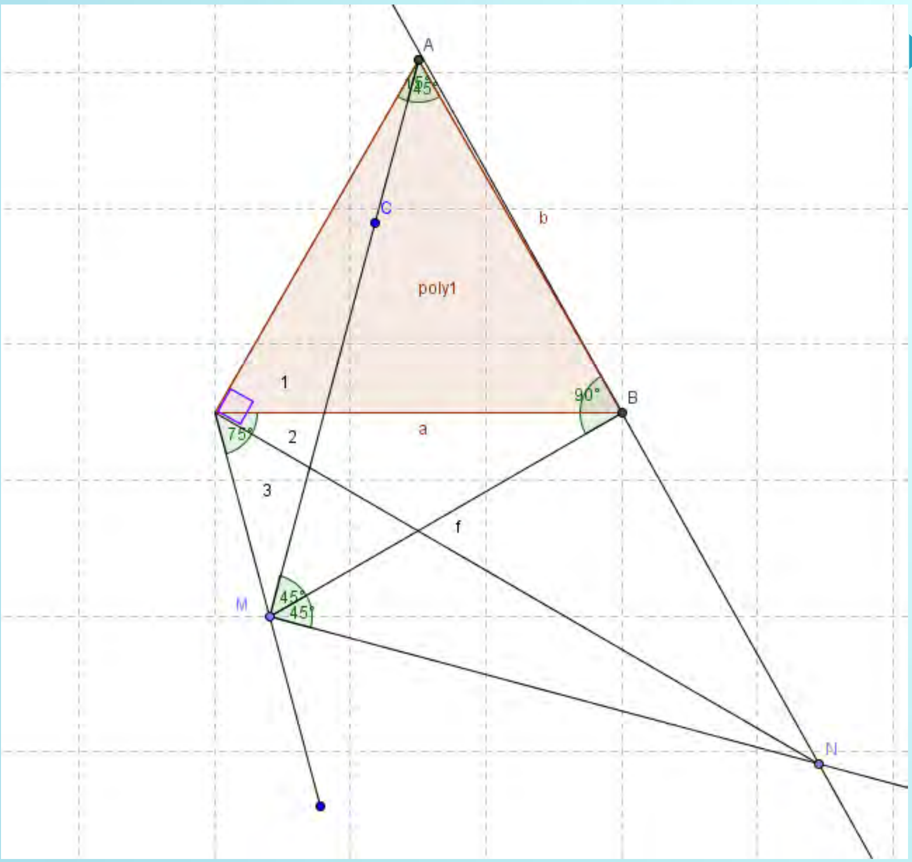
Έχουμε μια στοίβα με 22 σπίρτα.
Δύο παίκτες παίζουν ένα παιχνίδι στο όποιο κερδίζει αυτός που παίρνει τελευταίος σπίρτο.
Οι παίκτες παίρνουν 1 ή 2 σπίρτα σε κάθε γύρο. Ποιος μπορεί να έχει στρατηγική νίκης και ποια είναι αυτή;

ΛΥΣΗ

Στρατηγική νίκης έχει ο 1ος. Αρχικά, το 22 δεν είναι πολλ/σιο του 3, το 21 όμως είναι. Έτσι, ο 1ος παίκτης θα πάρει ένα σπίρτο και στη συνεχεία συμπληρώνει την κίνηση του 2ου ώστε το άθροισμα να είναι 3. Έτσι, σε κάθε περίπτωση στον τελευταίο γύρο θα έχουν μείνει 1 ή 2 σπίρτα με αποτέλεσμα την νίκη του 1ου .

Κων/ντίνα Λάτση

ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ



- Στο εξωτερικό ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Μ τέτοιο ώστε γων.ΒΓΜ=75^o και γων.ΒΑΜ=45^o . Δείξτε ότι ΜΒ=ΑΒ.

ΛΥΣΗ

$AB = B\Gamma = A\Gamma = \alpha$

$\left.\begin{array}{l} A = 60^o \\ A_1 = 45^o \end{array}\right\}$ $A_2 = 15^o$

Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά ίσο τμήμα $BN = \alpha$

Τότε στο τρίγωνο ΓΝΑ έχουμε ότι:

ΒΓ διάμεσος

$\left.\begin{array}{l} B\Gamma = \alpha \\ \\ AN=-2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$ ΓΝΑ ορθογώνιο $AN = 2\alpha \Rightarrow$ γων.$A\Gamma N = 90^o$

$\left.\begin{array}{r} \text{Άρα, αφού } A\Gamma N = 90^o \\ \Gamma_1 = 60^o \\ \text{και αφού } B\Gamma M = 75^o \end{array}\right\} \Rightarrow$ γων. $\Gamma_2 = 30^o$ και γων. $\Gamma_3 = 45^o$

το τετράπλευρο ΝΜΓΑ έχουμε ότι: $NAM = 45^o$ ΝΜΓΑ εγγράψιμο, αφού $N\Gamma M = 45^o$ η πλευρά ΜΝ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Άρα $\Gamma NM = MA\Gamma = 15^o$ οπότε $N = N1 + N2 = 30^o + 15^o \Rightarrow N = 45^o$.

Επομένως, το τρίγωνο ΜΝΑ είναι ισοσκελές (αφού $N = A1 = 45^o$),

άρα η διάμεσος ΒΜ θα είναι και ύψος, δηλαδή $MBA = 90^o$.

Χρύσα Χαραλαμπίδου

ΜΙΑ ΑΣΚΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

(και επίλυση της στη βάση της λογικής του «διαίρει και βασίλευε» του G. Polya).

Αν $\alpha>0$ και $\beta>\alpha+\gamma>0$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει ρίζες άνισες .

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δειχτεί ότι η Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ είναι θετική.

<u>1η περίπτωση</u>: Αν $\gamma<0$ τότε $\alpha\gamma<0$ άρα $-4\alpha\gamma>0$
Άρα $\Delta = \beta^2 + (-4\alpha\gamma) >0$

<u>2η περίπτωση</u>: Αν $\gamma \geq 0$ τότε από την $\beta>\alpha+\gamma>0$ έχουμε
$\beta^2 >(\alpha+\gamma)^2 \geq 4\alpha\gamma$ (αφού η τελευταία είναι ισοδύναμη με την $(\alpha-\gamma)^2 \geq 0$ που ισχύει), άρα και $\beta^2 >4\alpha\gamma$, άρα και πάλι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma >0$
Άρα η Διακρίνουσα είναι πάντα θετική, πράγμα που συνεπάγεται ότι η εξίσωση μας έχει πάντα δυο ρίζες άνισες. (Σημείωση:Η $2^η$ περίπτωση καλύπτει τελικά και την $1^η$......)

Στράτος Καραγιάννης

ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

Αν a,b,c,d,e ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και επιπλέον ισχύει ότι: $a+b+c+d+e=8$ και

$\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16$.

Ποια είναι η μέγιστη τιμή , την οποία δύναται να πάρει η μεταβλητή e, (max(e)=;)

ΛΥΣΗ

Έχω:

$(\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \geq$

$\geq (a\times 1 + b\times 1 + c\times 1 + d\times 1)^2 <=>$

$(16 - e^2)\times 4 \geq (8 - e)^2 <=>$

$64 - 4e^2 \geq 64 - 16e + e^2 <=>$

$5e^2 - 16e \leq 0 <=>$

$e(5e - 16) \leq 0 <=> 0 \leq e \leq 16/5$

Άρα $\max(e) = 16/5$.

Θάλεια Χαραλαμπίδη

ΜΙΑ ΩΡΑΙΑ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ
(από τα πιο συνηθισμένα αλγεβρικά προβλήματα)

Αν $a, b, c > 0$ να δειχτεί ότι
$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 6abc$

ΛΥΣΗ/ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρχικά διαιρούμε με abc και τα δύο μέλη της σχέσης, η οποία ισοδύναμα γίνεται:

$(a + b) / c + (b + c) / a + (c + a) / b \geq 6$

Και αρκεί να αποδειχτεί τελικά η σχέση:

$$a/c + b/c + b/a + c/a + c/b + a/b \geq 6$$

Αλλά επειδή ισχύει ότι για κάθε χ θετικό ότι $(x + 1/x) \geq 2$ θα έχουμε:

$$a/c + c/a \geq 2$$

$$b/c + c/b \geq 2$$

$$+ \quad b/a + a/b \geq 2$$

$$a/c + b/c + b/a + c/a + c/b + a/b \geq 6$$

Ο.ε.δ.

Κωνσταντίνα Ψωμά

Ευχαριστούμε πολύ για την προσοχή σας!

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Τα παραπάνω προβλήματα επελέγησαν από μια πλειάδα θεμάτων που είχαμε πραγματευθεί στην τάξη κατά τη διάρκεια λειτουργίας του Ομίλου ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ του Λυκείου της ΙΩΝΙΔΕΙΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΠΕΙΡΑΙΑ τη Σχολική Χρονιά 2013-2014 .
Επεξεργάστηκαν και παρουσιάστηκαν την τελευταία βδομάδα της Σχολικής Χρονιάς , στη Μεγάλη Αίθουσα Εκδηλώσεων, από μαθητές/τριες του Ομίλου , με ακροατές όλους σχεδόν τους μαθητές/τριες του Σχολείου μας.
Είναι αξιοσημείωτο πως η άνεση , σημάδι κατανόησης ασυνήθιστων και γενικά δύσκολων θεμάτων, με την οποία παρουσιάστηκαν από τα παιδιά αυτά τα θέματα, κράτησε αμείωτη την προσοχή του (γενικά δύσκολου) ακροατηρίου τους.

Ο Διδάσκων: Β.Ε. Βισκαδουράκης